SISTEMAS DE LEONTIEF

Jorge Paulo Araújo
Nali de Jesus de Souza

SINOPSE

O objetivo deste artigo é apresentar alguns resultados clássicos para a existência de soluções não negativas para sistemas lineares comuns em análise de insumo-produto. O texto é dividido em duas seções. Na primeira, é apresentada a matriz dos coeficientes técnicos, que é o fundamento da análise de insumo-produto, são definidas as matrizes de Leontief e Jones e são explicados os sistemas fundamentais. Na segunda seção, apresentam-se condições para a existência de soluções não negativas para os sistemas lineares de Leontief, demonstra-se o muito bem conhecido teorema de Hawkins-Simons, define-se a raiz de Frobeniu e obtem-se a série de Newmann para a matriz de Leontief e Jones.

Palavras-chave: insumo-produto, sistemas lineares.

1 AS MATRIZES DE LEONTIEF E JONES

O modelo de insumo-produto foi desenvolvido na década de 1930 por Wassily Leontief, que, em 1973, recebeu o prêmio Nobel por sua criação. Seu sucesso se deve ao fato de utilizar dados da economia real que podem ser obtidos de maneira relativamente fácil. Os economistas teóricos viram nele um modelo simples de equilíbrio geral adequado para testes empíricos; os economistas voltados para o planejamento encontrarem nele um auxiliar valioso.

Leontief imaginou a economia dividida em n setores, produzindo e consumindo n bens, e se fixou nas trocas entre esses setores. As suposições básicas de seu modelo são:

a) existem n setores, produzindo n bens, indexados por $i = 1, 2, ..., n$, que são consumidos, comercializados ou investidos;
b) cada setor produz um único e exclusivo bem; setores diferentes produzem bens diferentes; em outras palavras, existe uma relação um a um entre bens e setores;
c) cada setor produz o bem j correspondente através do consumo dos bens $i = 1, 2, ..., n$ em proporções fixas, ou seja, a quantidade de unidades consumidas $x_1, x_2, ..., x_n$, dos bens $i = 1, 2, ..., n$, respectivamente, por unidade do bem j produzido, é constante.

Notemos por d_i a demanda final do bem i; d_i representa as quantidades do bem i reservadas para consumo governamental, exportação, investimento e consumo familiar. Sejam v_1, v_2, ..., v_n os valores adicionados dos bens 1, 2, ..., n.

Existem no modelo de insumo-produto duas expressões básicas: o sistema linear

$$x_i - \sum_{j=1}^{j=n} a_{ij} \cdot x_j = d_i \text{, para } i = 1, 2, ..., n,$$

que representa a estrutura de produção, e

$$x_j - \sum_{i=1}^{i=n} a_{ij}^{*} \cdot x_i = v_j \text{, para } j = 1, 2, ..., n,$$

que representa o fluxo de valores na economia.

Representamos por x_{ij} a quantidade do bem i, produzido pelo setor i, necessário para a produção do bem j, ou seja, x_{ij} representa o consumo intersetorial. Então, com base em

$$x_i = x_{i1} + x_{i2} + ... + x_{in} + d_i \text{, para } i = 1, 2, ..., n,$$

definimos o coeficiente técnico

$$a_{ij} = \frac{x_{ij}}{x_j} \text{, para } i = 1,2, ..., n,$$

que é a quantidade necessária do bem i para produzir uma unidade do bem j. Portanto,

$$x_i = a_{i1} . x_1 + a_{i2} . x_2 + ... + a_{in} . x_n + d_i \text{, para } i = 1, 2, ..., n.$$

Escrevendo na forma matricial, teríamos

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ \cdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ \cdots \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} d_1 \\ \cdots \\ d_n \end{bmatrix}$$

ou seja, se $A = (a_{ij})$, $X = (x_j)$, $D = (d_j)$, então $X = A \cdot X + D$. Portanto,

$(I - A) . X = D$,

onde I é a matriz identidade n ´ n. A matriz A é dita matriz dos coeficientes técnicos; o vetor D é dito vetor de demanda. Escrevendo o sistema $(I - A) \cdot X = D$ explicitamente, obtemos

$$
\begin{array}{ccccccc}
(1-a_{11})\cdot x_1 & -a_{12}\cdot x_2 & \cdots & -a_{1n}\cdot x_n & = & d_1 \\
-a_{21}\cdot x_1 & +(1-a_{21})\cdot x_2 & \cdots & -a_{2n}\cdot x_n & = & d_2 \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
-a_{n1}\cdot x_1 & \cdots & \cdots & +(1-a_{nn})\cdot x_n & = & d_n\,.
\end{array}
$$

As equações acima são chamadas equações de análise interindustrial de Leontief. O problema é obter o produto X em função da demanda D, ou seja, resolver o sistema acima. Se a matriz $(I - A)$ é inversível, então,

$X = (I - A)$-1 . D.

A matriz $(I - A)$-1 $= K$ é chamada *matriz de Leontief*. Essa matriz nos permite calcular as quantidades totais necessárias, direta e indiretamente, para a produção de $x_1, ..., x_n$ em função das demandas finais $d_1, ..., d_n$.

Se escrevemos $K = (k_{ij})$, então k_{ij} representa a variação na quantidade x_i quando aumentamos a demanda d_j de uma unidade. Por isso, diz-se que o coeficiente k_{ij} da matriz de Leontief representa o impacto da demanda pelo bem produzido no setor j. O impacto total para trás que o setor j causa na economia é dado por

$$K._j = \sum_{i=1}^{n} k_{ij} = k_{1j} + k_{2j} + \ldots + k_{jn} \cdot$$

Estamos medindo as quantidades dos bens produzidos nas suas unidades originais de medida, ou seja, ferro em toneladas e automóveis em unidades. O coeficiente técnico a_{ij} representa a quantidade do bem i, na sua unidade usual de medida, necessária para a produção de uma unidade do bem j, também medido na sua unidade original. Na prática, isso é impossível; por isso, utilizamos, em vez das unidades originais, os fluxos monetários, substituindo a_{ij} por

 Teor. Evid. Econ., Passo Fundo, v. 6, n. 11, p. 125-144, nov. 1998

$$*a_{ij} = \frac{x_{ij} \cdot p_i}{x_j \cdot p_j} = a_{ij} \cdot \frac{p_i}{p_j}.$$

Definimos uma unidade física comum a todos os bens, que corresponde à quantidade física do bem que podemos adquirir com uma unidade monetária. Nesse caso, x_i representa tanto a quantidade do bem i quanto o preço dessa quantidade. Quando todos os bens estão expressos em unidades monetárias $a_{ij} = {}^*a_{ij}$.

A expressão

$$x_{1j} + x_{2j} + ... + x_{nj}$$

que é desprovida de sentido se não temos uma unidade comum de medida, passa a respresentar o total de compras do setor j. Definimos

$$a_{ij}^* = \frac{x_{ij}}{x_i},$$

que representa a fração do bem i consumida na produção do bem j, ou a fração do valor desse bem incorporada por unidade do bem j. Observe-se que

$$x_{ij} = a_{ij} \cdot x_j = a_{ij}^* \cdot x_i.$$

A expressão

$$x_j - (x_{1j} + x_{2j} + \ldots + x_{nj}) = v_j$$

representa a diferença de valor entre o valor do bem j e o valor dos insumos empregados, que definimos como o valor adicionado v_j. Podemos escrever a expressão acima como

$$x_j - (x_1 \cdot \frac{x_{1j}}{x_1} + x_2 \cdot \frac{x_{2j}}{x_2} + \ldots + x_n \cdot \frac{x_{nj}}{x_n}) = v_j,$$

ou

$$x_j - (x_1 \cdot a_{1j}^* + x_2 \cdot a_{2j}^* + \ldots + x_n \cdot a_{nj}^*) = v_j, \text{para } j = 1, 2, ..., \quad .$$

Escrevendo na forma matricial

$$[x_1 \quad \cdots \quad x_n] - [x_1 \quad \cdots \quad x_n] \cdot \begin{bmatrix} a_{11}^* & \cdots & a_{n1}^* \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{1n}^* & \cdots & a_{nn}^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_1 \\ \cdots \\ v_n \end{bmatrix},$$

ou

$$X^t \cdot (I - A^*) = V^t,$$

onde X^t e V^t são os vetores X e V transpostos. Se a matriz $(I - A^*)$ é inversível, então,

$$X^t = V^t \cdot (I - A^*)^{-1} \cdot$$

A matriz $(I - A^*)$-1 = $K^* = (k_{ij}^*)$ é dita a matriz inversa de Jones. A partir da expressão acima, obtemos

$$x_j = v_1 \cdot k_{1j}^* + v_2 \cdot k_{2j}^* + \ldots + v_n \cdot k_{nj}^*$$

portanto, k_{ij}^* indica a variação de valor no setor j se aumentar de uma unidade o valor de venda do setor i. Disso se deduz que

$$K_{i.}^* = k_{i1}^* + \ldots + k_{in}^*$$

indica a variação de valor agregada ao setor i, aumentando o valor de venda de uma unidade. O número $a_{ij}^* \cdot x_i$ representa o valor pago para o setor i pelo setor j para cada unidade de j produzida.

$$x_j = a_{1j}^* \cdot x_1 + a_{2j}^* \cdot x_2 + \ldots + a_{nj}^* \cdot x_n + v_j, \text{ para } j = 1, 2, ..., n \cdot$$

Transpondo o sistema $X^t = V^t$. $(I - A^*)$ –1, temos

$(I - (A^*)^t)$-1 . $V = X$,

ou

$(I - (A^*)^t)$. $X = V$.

Escrevendo explicitamente, temos:

$$\begin{array}{cccccc} (1-a_{11}^{*})\cdot x_1 & -a_{21}^{*}\cdot x_2 & \cdots & -a_{n1}^{*}\cdot x_n & = & v_1 \\ -a_{12}^{*}\cdot x_1 & +(1-a_{22}^{*})\cdot x_2 & \cdots & -a_{n2}^{*}\cdot x_n & = & v_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -a_{1n}^{*}\cdot x_1 & \cdots & \cdots & +(1-a_{nn}^{*})\cdot x_n & = & v_n \end{array} .$$

2 A EXISTÊNCIA DE SOLUÇÕES

Nos sistemas apresentados, a questão não se reduz a encontrar soluções ou saber se as matrizes de Leontief e de Jones existem.

Temos sistemas lineares

$$\begin{array}{ccccccc} b_{11}\cdot x_1 & + & \cdots & + & b_{1n}\cdot x_n & = & y_1 \\ b_{21}\cdot x_1 & + & \cdots & + & b_{2n}\cdot x_n & = & y_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{n1}\cdot x_1 & + & \cdots & + & b_{nn}\cdot x_n & = & y_n \end{array},$$

onde $b_{ij} \le 0$, para $i \ne j$, e $Y = (y_1, \ldots, y_n) \ge 0$, isto é, $y_i \ge 0, \forall i \in \{1, \ldots, n\}$.

Queremos estabelecer condições sob as quais existe solução $X = (x_1, \ldots, x_n) \ge 0$.

Dizemos que o sistema linear $B \cdot X = Y$ é;

I) fracamente solúvel se,

para algum $Y = (y_1, \ldots, y_n) > 0$, existe solução $X = (x_1, \ldots, x_n) \ge 0$;

II) fortemente solúvel se

$\forall Y = (y_1, \ldots, y_n) \ge 0$ existe solução $X = (x_1, \ldots, x_n) \ge 0$.

Para uma matriz $B = (b_{ij})$, dizemos que B cumpre a condição de Hawkins-Simon$(H-S)$ se

$$\Delta_1 = |b_{11}| > 0, \Delta_2 = \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{vmatrix} > 0, \Delta_3 = \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{vmatrix} > 0,.$$

$$\ldots, \Delta_n = \begin{vmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix} > 0.$$

Teorema 1 As condições *I), II)* e $(H - S)$ são equivalentes, isto é, $I) \Leftrightarrow II) \Leftrightarrow (H - S)$.

Prova

$I) \rightarrow (H - S)$

O sistema é fracamente solúvel. Portanto, existe $Y = (y_1, ..., y_n) > 0$ tal que o sistema $B \cdot X = Y$ tem solução $X = (x_1, \ldots, x_n) \geq 0$. Primeiramente, observemos que

$$b_{11} \cdot x_1 = y_1 - b_{12} \cdot x_2 - \ldots - b_{1n} \cdot x_n > 0,$$

pois $b_{1j} \leq 0$, para $j \geq 2$, $x_j \geq 0$ e $y_1 > 0$. Então, $b_{11} = \Delta_1 > 0$. Provemos a proposição por indução em n. Para $n = 1$, o resultado é óbvio pela observação anterior. Supondo o resultado para $1, ..., n-1$, consideremos o sistema

$$\begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & \cdots & b_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \cdots \\ y_n \end{pmatrix} \cdot (*)$$

Como $b_{11} > 0$, podemos eliminar b_{i1}, por linha-redução, para $i \geq 2$ e obter um sistema equivalente

$$\begin{pmatrix} b_{11} & b_{21} & b_{1n} \\ 0 & b'_{22} & b'_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & b'_{n2} & b'_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y'_2 \\ \cdots \\ y'_n \end{pmatrix}, (**)$$

onde

$$b'_{ij} = b_{ij} - \frac{b_{1j} \cdot b_{i1}}{b_{11}}$$

e

$$y'_i = y_i - \frac{y_i \cdot b_{i1}}{b_{11}} \cdot$$

Como $b_{1j} \leq 0, b_{i1} \leq 0$ e $y_i > 0$ para $i, j \geq 2$, então, $b'_{ij} \leq 0$ para $i \neq j$ e $y'_i > 0$ para $i \geq 2$. O sistema $(n-1)\times(n-1)$

$$\begin{pmatrix} b'_{22} & \cdots & b'_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ b'_{n2} & \cdots & b'_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_2 \\ \cdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y'_2 \\ \cdots \\ y'_n \end{pmatrix} (***),$$

é fracamente solúvel, pois $(x_2, \ldots, x_n) \geq 0$. Pela hipótese de indução,

$$\Delta'_k = \begin{vmatrix} b'_{22} & \cdots & b'_{2k} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ b'_{k2} & \cdots & b'_{kk} \end{vmatrix} > 0, \text{para } k = 2, \ldots, n,$$

mas

$$\Delta_k = \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1k} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2k} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{k1} & b_{k1} & \cdots & b_{kk} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1k} \\ 0 & b'_{22} & \cdots & b'_{2k} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & b'_{k2} & \cdots & b'_{kk} \end{vmatrix} = b_{11} \cdot \Delta'_k > \quad ,$$

pois b11 > 0.

$(H-S) \rightarrow II)$

A prova é também por indução sobre n. Para $n=1$, o resultado é óbvio, pois, por hipótese, $\Delta_1 = b_{11} > 0$ se $y_1 \geq 0$, então, $x_1 = \dfrac{y_1}{b_{11}} \geq 0$. Supondo o resultado válido para $1,\ldots,(n-1)$, consideremos o sistema $(*)$. Então, por linha-redução, obtemos $(**)$. Para o sistema $(***)$, temos

$$\Delta'_k = \frac{\Delta_k}{b_{11}} > 0,$$

pois, por hipótese, $\Delta_k > 0$. Portanto, vale $(H-S)$ para o sistema $(***)$ de ordem $(n-1)\times(n-1)$ e como $b_{1j}, b_{i1} \leq 0$, para $i, j \geq 2$; então,

$$b'_{ij} = b_{ij} - \frac{b_{1j} \cdot b_{i1}}{b_{11}} \leq b_{ij} \leq 0, \text{se}\, i \neq j\,.$$

Por hipótese de indução, o sistema $(***)$ é fortemente solúvel. Como $y_i \geq 0$, então

$$y'_i = y_i - \frac{y_i \cdot b_{i1}}{b_{11}} \geq 0$$

e, portanto, o sistema $(***)$ tem solução $(x_2,\ldots,x_n) \geq 0$. Neste caso,

$$x_1 = \frac{y_1 - b_{12} \cdot x_2 - \ldots - b_{1n} \cdot x_n}{b_{11}} \geq 0.$$

Evidentemente, $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \geq 0$ é a solução de $(*)$ e o resultado é válido para n, ou seja, $(*)$ é fortemente solúvel.

$II) \rightarrow I)$ Óbvio.

Consideremos sistemas da forma, que chamamos *sistema básico*,

$$\begin{array}{cccccc}
(\rho - a_{11}) \cdot x_1 & - a_{12} \cdot x_2 & \cdots & - & a_{1n} \cdot x_n & = \\
- a_{21} \cdot x_1 & + (\rho - a_{22}) \cdot x_2 & \cdots & - & a_{2n} \cdot x_n & = \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
- a_{n1} \cdot x_1 & - & \cdots & + & (\rho - a_{nn}) \cdot x_n & =
\end{array}$$

e

$$\begin{array}{cccccc}
(\rho - a_{11}) \cdot y_1 & - a_{21} \cdot y_2 & \cdots & - & a_{n1} \cdot y_n & = \\
- a_{21} \cdot y_1 & + (\rho - a_{22}) \cdot y_2 & \cdots & - & a_{n2} \cdot y_n & = \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
- a_{1n} \cdot y_1 & - & \cdots & + & (\rho - a_{nn}) \cdot y_n & =
\end{array}$$

chamado *sistema dual*.

Sejam $r_i = \sum_{j=1}^{j=n} a_{ij}$ e $s_j = \sum_{i=1}^{i=n} a_{ij}$

Teorema 2 (Critérios de Brauer-Solow)

i) Se $\rho > r_i, \forall i \Rightarrow$ valem $I)$, $II)$, $(H - S)$ para o sistema básico.

ii) Se $\rho > s_j, \forall j \Rightarrow$ valem $I)$, $II)$, $(H - S)$ para o sistema básico.

Prova:

Seja

$$\begin{array}{cccccc}
(\rho - a_{11}) \cdot x_1 & - a_{12} \cdot x_2 & \cdots & - & a_{1n} \cdot x_n & = \\
- a_{21} \cdot x_1 & + (\rho - a_{22}) \cdot x_2 & \cdots & - & a_{2n} \cdot x_n & = \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
- a_{n1} \cdot x_1 & - & \cdots & + & (\rho - a_{nn}) \cdot x_n & =
\end{array}$$

$x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 1$ é a solução desse sistema. Portanto, o sistema básico é fracamente convergente(I). Observe-se que não é possível relaxar a condição $\rho > r_i, \forall i$, para $\rho \geq r_i, \forall i$.

Seja o sistema

$$\begin{array}{cccccc}
(\rho - a_{11}) \cdot y_1 & - a_{21} \cdot y_2 & \cdots & - & a_{1n} \cdot y_n & = \\
- a_{12} \cdot y_1 & + (\rho - a_{22}) \cdot x_2 & \cdots & - & a_{n2} \cdot y_n & = \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
- a_{1n} \cdot y_1 & - & \cdots & + & (\rho - a_{nn}) \cdot y_n & =
\end{array}$$

$y_1 = y_2 = \ldots = y_n = 1$ é a solução desse sistema. Então, o sistema dual é fracamente convergente(I); portanto, vale $(H - S)$ para o sistema dual, ou seja,

$$\begin{vmatrix}
\rho - a_{11} & - a_{21} & \ldots & - a_{k1} \\
- a_{21} & \rho - a_{22} & \ldots & - a_{k2} \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
- a_{1k} & - a_{2k} & \ldots & \rho - a_{kk}
\end{vmatrix} > 0, \text{para } k \geq 1.$$

Como o determinante de uma matriz M é igual ao determinante da matriz transposta M^t, concluímos que

$$\Delta_k = \begin{vmatrix} \rho - a_{11} & -a_{12} & \dots & -a_{1k} \\ -a_{12} & \rho - a_{22} & \dots & -a_{2k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ -a_{k1} & -a_{k2} & \dots & \rho - a_{kk} \end{vmatrix} > 0, \text{ para } k \geq 1$$

ou seja, vale $(H - S)$ para o sistema básico.

Do ponto de vista econômico, é razoável exigir

$$\frac{x_{1j} + x_{2j} + \dots + x_{nj}}{x_j} < 1, \text{ para } j = 1,2,\dots,n,$$

ou seja,

$$a_{1j} + a_{2j} + \dots + a_{nj} < 1, \text{ para } j = 1,2,\dots,n,$$

e

$$\frac{x_{i1} + x_{i2} + \dots + x_{in}}{x_i} < 1, \text{ para } i = 1,2,\dots,n,$$

ou seja,

$$a^*_{i1} + a^*_{i2} + \dots + a^*_{in} < 1, \text{ para } i = 1,2,\dots,n.$$

Portanto, os critérios de Brauer-Solow asseguram a existência de soluções não negativas para os sistemas $(I - A) . X_1 = D$ e $(I - (A^*)^t) \cdot X_2 = V$.

Dizemos que B satisfaz I), II) e $(H - S)$, caso o sistema $B \cdot X = Y$ satisfaça as condições I), II) e $(H - S)$.

Seja B uma matriz, dizemos que B é não negativa, $B \geq 0$, se $b_{ij} \geq 0$, para $\forall i, j$; caso $b_{ij} > 0$, para $\forall i, j$, dizemos que B é positiva e escrevemos $B > 0$. Da mesma maneira, definimos um vetor $X = (x_1, \dots, x_n) \geq 0$ ou $X = (x_1, \dots, x_n) > 0$.

Teorema 3

Seja $B \geq 0$, matriz n x n, tal que $b_{ij} \leq 0$ se $i \neq j$. B^{-1} existe e $B^{-1} \geq 0$ se e só se B satisfaz I), II), $(H-S)$.

Prova

$\rightarrow$ Se B^{-1} existe e $B^{-1} \geq 0$, então, a solução do sistema $B \cdot X = C$ é dada por $X = B^{-1} \cdot C \geq 0$. Portanto, o sistema $B \cdot X = C$ é fortemente solúvel, ou seja, B satisfaz I), II), $(H-S)$.

$\leftarrow$ Seja

$$E_j = \begin{pmatrix} 0 & \\ \dots & \\ 1 & \leftarrow j \\ \dots & \\ 0 & \end{pmatrix},$$

o vetor $(\delta_{1j}, \delta_{2j}, \ldots, \delta_{ij}, \ldots, \delta_{nj})$, onde $\delta_{ij} = 0$, se $i \neq j$ e $\delta_{ij} = 1$ se $i = j$. Como vale $(H-S)$, então o sistema $B \cdot X = E_j$ tem solução $X_j \geq 0$. A matriz cujas colunas são as soluções X_j, $j = 1, 2, \ldots, n$ é a matriz inversa B^{-1}. Como $X_j \geq 0$, então $B \geq 0$.

Corolário 4

Seja A, matriz n ´ n, $A \geq 0$, $\rho \in \Re$.

$(\rho \cdot I - A)^{-1} \geq 0$ se e só se $(\rho \cdot I - A)$ satisfaz I), II), $(H-S)$.

Seja A matriz n ´ n, $A \geq 0$, $\rho \in \Re$, definimos o conjunto

$M(A) = \{\rho \in \Re \,|\, \text{se}\, (\rho \cdot I - A) \text{ satisfaz } I), II), (H-S)\}$.

Teorema 4

Seja A, matriz n x n, $A \geq 0$, $\rho \in \Re$. $M(A) = (\lambda(A), +\infty)$ e $\lambda(a) \geq 0$.

Prova

Consideremos as matrizes $(\rho \cdot I - A)$. Como

$$\Delta_k = \begin{vmatrix} \rho - a_{11} & -a_{12} & \dots & -a_{1k} \\ -b_{21} & \rho - a_{22} & \dots & -a_{2k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ -a_{k1} & -a_{k1} & \dots & \rho - a_{kk} \end{vmatrix} = 1 \cdot p^k + \dots$$

é um polinômio unitário de grau k em ρ, então, $\lim_{\rho \to +\infty} \Delta_k = +\infty$. Portanto, para valores suficientemente grandes de r, r Î $M(A)$, ou seja, $M(A)$ ¹ 0. Digamos que $\rho' \in M(A)$, seja $\rho \geq \rho'$, então $(\rho \cdot I - A) \geq (\rho' \cdot I - A)$. Como $\rho' \in M(A)$, se $c' \geq 0$, o sistema $(\rho' \cdot I - A) \cdot x = c'$ tem solução $x \geq 0$, mas $(\rho \cdot I - A) \cdot x = c \geq (\rho' \cdot I - A) \cdot x = c'$. Portanto, o sistema $(\rho \cdot I - A) \cdot x = c$ tem solução $x \geq 0$, onde $c > 0$. Logo, $(\rho \cdot I - A)$ satisfaz I) e $\rho \in M(A)$. Provemos que se $\rho \in M(A)$, então, $\rho \geq 0$. Suponhamos que $\rho < 0$, então, $(\delta_{i1} \cdot \rho - a_{i1}) \cdot x_1 + (\delta_{i2} \cdot \rho - a_{i2}) \cdot x_2 + \dots + (\delta_{in} \cdot \rho - a_{in}) \cdot x$, para i = 1, 2, ..., n.

Portanto, $(\rho \cdot I - A) \cdot x \leq 0, \forall x \geq 0$, logo, $(\rho \cdot I - A)$ não satisfaz II).

Seja

$$\lambda(A) = \inf M(A).$$

Provemos que $\lambda(A) \notin M(A)$. Se $\lambda(A) \in M(A)$, então dado c > 0, existe $x \geq 0$ tal que $(\lambda(A) \cdot I - A) \cdot x = c$. Como $c > 0$, existe $\varepsilon \in \Re$, tal que $c - \varepsilon \cdot x > 0$. Então, $((\lambda(A) - \varepsilon) \cdot I - A) \cdot x = c - \varepsilon \cdot x > 0$, ou seja, $(\lambda(A) - \varepsilon) \in M(A)$, o que é uma contradição. A conclusão de todas as observações acima é que $M(A)$ é um intervalo aberto da forma $(\lambda(A), +\infty)$, com $\lambda(A) \geq 0$.

Teorema 6

Seja $A \geq 0$, matriz n x n, então, $\lambda(A)$ é autovalor de A e existe um autovetor $x \geq 0$ de A, associado ao autovalor $\lambda(A)$.

Prova

Fixemos $c > 0$. Seja $\rho \in M(A)$, o sistema $(\rho \cdot I - A) \cdot x = c$ tem uma única solução $x \neq 0$ designemos essa solução por $x(\rho)$.

Seja $\rho' > \rho$, como $(\rho \cdot I - A) \cdot x(\rho) = c = (\rho' \cdot I - A) \cdot x(\rho')$, então, $\rho \cdot x(\rho) - A \cdot x(\rho) - \rho' \cdot x(\rho') + A \cdot x(\rho') = 0$ · Portanto,

$$\rho \cdot (x(\rho) - x(\rho')) - A \cdot (x(\rho) - x(\rho')) = (\rho' - \rho) \cdot x(\rho'),$$

ou

$$(\rho \cdot I - A) \cdot (x(\rho) - x(\rho')) = (\rho' - \rho) \cdot x(\rho') \geq 0.$$

Então, $x(\rho) - x(\rho') \geq 0$, o que implica $x(\rho) \geq x(\rho')$.

Seja $r_1 > r_2 >$ ¼ $> r_m >$¼ $> l(A)$ uma seqüência decrescente convergindo para $l(A)$. Pelo que estabelecemos acima, temos $x(r_1)$ £ $x(r_2)$ £ ¼ £ $x(r_m)$ £ ¼ . A seqüência de vetores $x(r_m)$ não é limitada em Â ^{n}. Se essa seqüência fosse limitada, então, teria subseqüência limitada pelo teorema de Bolzano-Weierstrass, que assegura que toda a subseqüência limitada em Â ^{n} tem subseqüência limitada. Seja $x(\rho_{m_k})$ uma subseqüência convergente de $x(r_m)$, convergindo para x ³ 0, então $(\rho_{m_k} \cdot I - A) \cdot x(\rho_{m_k}) \rightarrow (\lambda(A) \cdot I - A) \cdot x = c$. Como $c > 0$, então, $l(A)$ e $M(A)$, que sabemos que é falso pelo teorema anterior. Portanto, $\|x(\rho_m)\| \rightarrow +\infty$.

Por outro lado,

$$\frac{x(\rho_m)}{\|x(\rho_m)\|} \in S^1,$$

onde S^1 é a esfera dos vetores $x \in \Re^n$ tal que $\|x\| = 1$. Pelo teorema de Bolzano-Weierstrass, existe

$$\frac{x(\rho_{m_k})}{\|x(\rho_{m_k})\|} \rightarrow x \in S^1 \text{ e } x \geq 0.$$

Então,

$$(\rho_{m_k} \cdot I - A) \cdot \frac{x(\rho_{m_k})}{\|x(\rho_{m_k})\|} = \frac{c}{\|x(\rho_{m_k})\|},$$

mas $\dfrac{c}{\|x(\rho_{m_k})\|} \to 0$ e $(\rho_{m_k} \cdot I - A) \cdot \dfrac{x(\rho_{m_k})}{\|x(\rho_{m_k})\|} = (\lambda(A) \cdot I - A) \cdot x$. Portanto,

$$(\lambda(A) \cdot I - A) \cdot x = 0,$$

ou seja, $\lambda(A)$ é autovalor de A e $x \geq 0$ é autovetor associado.

Se A matriz $n \times n$, definimos

$$\varphi(A) = \sup(\lambda \mid \lambda \text{ é autovalor real de } A\},$$

$\varphi(A)$ é raiz de Frobenius de A. Para $A \geq 0$, acabamos de provar que $\lambda(A)$ é autovalor e como para todo $\rho > \lambda(A)$, $\rho \in M(A)$, então, $\lambda(A)$ é a raiz de Frobenius de A.

Lema 7

Seja $A \geq 0$ e $0 \leq x \in \Re^n$ tal que $(\mu \cdot I - A) \cdot x \leq 0 \to \mu \leq \lambda(A)$.

Prova

Digamos que $(\mu \cdot I - A) \cdot x = c$, então $(\mu \cdot I - A) \cdot (-x) = -c \geq 0$. Se $\mu > \lambda(A)$, o sistema $(\mu \cdot I - A) \cdot y = -c$ tem uma única solução $y \geq 0$, como $-x \leq 0$, então, $\mu \cdot \leq \lambda(A)$.

Teorema 8

Se $\omega \in$ C é autovalor complexo de $A \geq 0 \to |\omega| \leq \lambda(A)$.

Prova

Seja $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in C^n$ autovetor associado ao ω, isto é, $A \cdot x = \omega$, ou

$$a_{i1} \cdot x_1 + a_{i2} \cdot x_2 + \ldots + a_{in} \cdot x_n = \omega \cdot x_1, \text{ para } i = 1,2,\ldots,n.$$

Ainda,

$$|a_{i1} \cdot x_1 + \ldots + a_{in} \cdot x_n| = |\omega| \cdot |x_1| \leq a_{i1} \cdot |x_1| + \ldots + a_{in} \cdot |x_n|, \text{ para i = 1, 2, ..., n.}$$

Seja $y = (|x_1|, |x_2|, \ldots, |x_n|) \in \Re^n$, então,

$|\omega| \cdot y \leq A \cdot y$,

o que implica que $|\omega| \leq \lambda(A)$.

Teorema 9

Seja B, matriz n x n, tal que $b_{ij} \leq 0$, para $i \neq j$.

B satisfaz I), II), $(H - S)$ se e só se a parte real de todo o autovalor de B é positiva.

Prova

$\rightarrow$ Seja $A = \rho \cdot I - B$. Escolhendo r suficientemente grande, temos $A \geq 0$. Seja $l(A)$ a raiz de Frobenius de A. Seja b um autovalor de B,

$0 = \det(-\beta \cdot I + B) = \det(-\beta \cdot I + \rho \cdot I - A) = \det((\rho - \beta) \cdot$,

então, $(\rho - B)$ é autovalor de A . Portanto, $|\rho - \beta| \leq \lambda(A)$, então,

$\rho - Real(\beta) \leq |\rho - \beta| \leq \lambda(A) < \rho$,

então, $Real(\beta) > 0$.

$\leftarrow$

Suponhamos que w é autovalor de B e que $Real$(w)>0. Seja $\rho \in \Re, \rho \cdot I - B = A, x$ autovetor associado ao l(A), então,

$B \cdot x = (\rho \cdot I - A) \cdot x = (\rho - \lambda(A)) \cdot x$.

Portanto, $(\rho - \lambda(A))$ é autovalor de B. Como $\rho \in \Re$, então, por hipótese, $(\rho - \lambda(A)) > 0$, que implica que $\rho > \lambda(A)$. Então, B satisfaz I), II), III), (H – S).

Teorema 10

Seja $A \geq 0$, matriz n x n, l(A), a raiz de Frobenius de A, então,

$$\rho > \lambda(A) \rightarrow \frac{1}{\rho} \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{A}{\rho} \right)^k = (\rho \cdot I - A)^{-1} .$$

Prova

Consideremos

$$(\rho \cdot I - A) \cdot \left(\frac{I}{\rho} + \frac{A}{\rho^2} + \frac{A^2}{\rho^3} + \cdots + \frac{A^n}{\rho^{n+1}} \right) = I - \frac{A^{n+1}}{\rho^{n+1}} .$$

Como $\rho > \lambda(A)$, então, $(\rho \cdot I - A)$ é inversível. Portanto,

$$\left(\frac{I}{\rho} + \frac{A}{\rho^2} + \frac{A^2}{\rho^3} + \cdots + \frac{A^n}{\rho^{n+1}} \right) \leq (\rho \cdot I - A)^{-1} \cdot \left(I - \frac{A^{n+1}}{\rho^{n+1}} \right)$$

Como $A \geq 0$, então,

$$\left(\frac{I}{\rho} + \frac{A}{\rho^2} + \frac{A^2}{\rho^3} + \cdots + \frac{A^n}{\rho^{n+1}} \right) \leq (\rho \cdot I - A)^{-1},$$

é uma seqüência não-decrescente limitada. Então,

$$\left(\frac{I}{\rho} + \frac{A}{\rho^2} + \frac{A^2}{\rho^3} + \cdots + \frac{A^n}{\rho^{n+1}} \right) \rightarrow T$$

e, conseqüentemente, $\frac{A^{n+1}}{\rho^{n+1}} \rightarrow 0$. Isso implica que $T = (\rho \cdot I - A)^{-1}$.

Corolário 11

Se $\lambda(A) < 1 \rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} A^k = (I - A)^{-1}$

Prova

Pelos critérios de Brauer-Solow, sabemos que as condições I), II), (H – S) são satisfeitas pelas matrizes $(1 \cdot I - A)$ e $(1 \cdot I - (A^*)^t)$, portanto, $\lambda(A), \lambda((A^*)^t) < 1$. Logo, temos que

$$K = I + A + A^2 + \ldots + A^n + \ldots,$$

e

$$K^* = I + (A^*) + (A^*)^2 + \ldots + (A^*)^n + \ldots$$

Podemos obter uma estimativa do erro cometido quando truncamos a série em n. Seja $a = \sup\{a_{ij} \mid i, j = 1,2,\ldots,n\}$ e $S_n = I + A + A^2 + \ldots + A^n$, então,

$$\left|k_{ij} - (S_n)_{ij}\right| \leq \frac{a^{n+1}}{1-a},$$

e se $S_n^* = I + (A^*) + (A^*)^2 + \ldots + (A^*)^n$, $a^* = \sup\{a_{ij}^* \mid i, j = 1,2,\ldots,n\}$,

Então,

$$\left|k_{ij}^* - (S_n^*)_{ij}\right| \leq \frac{(a^*)^{n+1}}{1-(a^*)}.$$

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

DORFMAN, Robert, SAMUELSON, Paul, SOLOW, Robert. *Linear programming and economic analysis*. McGraw-Hill, 1958.

MILLER, Ronald, BLAIR, Peter. *Input-output analysis*: foundations and extensions. Prentice-Hall, 1985.

NIKAIDO, Hukukane. *Convex structure and economic theory*. Academic Press, 1968.

SOUZA, Nali de Jesus de. *Desenvolvimento econômico*. Editora Atlas, 1997.

SYNOPSIS

LEONTIF'S SYSTEMS

The objective of this article is to present some classic results for the existence of non-negative solutions for common linear systems in input-output analysis. It is divided in two sections. The first section presents the basics of input-output analysis, the matrix of the technical coefficients, Leontief's and Jones's matrices are defined and fundamental systems are explained. The second section presents conditions for the existence of non-negative solutions for Leontief's linear systems, the Hawkins-Simons's very well-know theorem is demonstrated, the Frobeniu's root is defined and Newmann's series for Leontief's and Jones's matrix is obtained.

Key-words: input-output analysis, linear systems.

SINOPSIS

SISTEMAS DE LEONTIEF

El objetivo deste artículo es presentar algunos resultados clásicos para la existencia de soluciones no negativas para sistemas lineares comunes en análisis de insumo-producto. O texto es dividido en dos secciones. En la primera sección, es presentada la matriz de coeficientes técnicos, que es el fundamento de análisis del insumo-producto, son definidas las matrices de Leontief y Jones y son explicados los sistemas fundamentales. En la segunda sección, se presentan las condiciones para la existencia de soluciones no negativas para los sistemas lineares de Leontief, se demuestra el muy bien conocido teorema de Hawkins-Simons, se define la raíz de Frobeniu y se obtiene la serie de Newmann para la matriz de Leontief y Jones.

Palabras clave: análisis de insumo-producto, sistemas lineares.