

# ESTUDO DA DINÂMICA POPULACIONAL USANDO OS MODELOS DE MALTHUS E VERHULST: UMA APLICAÇÃO À POPULAÇÃO DE PASSO FUNDO<sup>1</sup>

Betine Diehl Seti<sup>2</sup>  
Maria de Fátima Baptista Betencourt<sup>3</sup>  
Neuza Terezinha Oro<sup>4</sup>  
Rosana M. L. Kripka<sup>5</sup>  
Vera Jussara L. Muhl<sup>6</sup>

## SINOPSE

*Este trabalho apresenta um estudo da dinâmica populacional urbana da cidade de Passo Fundo segundo os modelos clássicos de Malthus e Verhulst. Os parâmetros de ambos os modelos foram calculados a partir de dados reais. A simulação da dinâmica populacional segundo Malthus apresentou resultados bastante próximos do real, no entanto a melhor aproximação simulação foi obtida através do modelo de Verhulst.*

Palavras-chave: dinâmica populacional, modelagem matemática, modelos.

## 1 INTRODUÇÃO

O estudo da dinâmica populacional é importante por dar cunho específico à configuração de uma sociedade e às questões pertinentes aos seus múltiplos aspectos, sejam econômicos, políticos ou socioculturais. Levando em consideração o fato de Pas-

---

<sup>1</sup> Esse trabalho foi desenvolvido pelo Grupo de Estudos de Matemática. Os autores agradecem a colaboração do Dr. Marat M. Rafikov, da Universidade de Ijuí, pela assessoria técnica prestada; ao IBGE, aos cartórios de Registro Civil e hospitais de Passo Fundo, que forneceram os dados para a realização do trabalho. Agradecem aos professores colaboradores Adriano Pasqualotti, Ana Maria R. Teixeira, Carmem Hessel Peixoto Gomes, Rejane Padilha Quedi dos Santos, Sandra Mara Marasini, Susana Klajn, Auro Cândido Marcolan, Dirceu Lima dos Santos, e aos alunos Pedro Antonio Muller, Jacqson Dalbosco, Rosângela Salles e Idite Terezinha Demartini.

<sup>2</sup> Mestre em Matemática (Unijuí). Professora Iceg/UPF e-mail betine@upf.tche.br.

<sup>3</sup> Mestre em Matemática (Unijuí). Professora Iceg/UPF e-mail fátima@upf.tche.br.

<sup>4</sup> Mestre em Matemática (Unijuí). Professora Iceg/UPF e-mail neuza@upf.tche.br.

<sup>5</sup> Mestre em Matemática Aplicada (USP). Professora Iceg/UPF e-mail Kripka@upf.tche.br.

<sup>6</sup> Mestre em Matemática Aplicada (Unicamp). Professora Iceg/UPF e-mail vjlm@upf.tche.br.

so Fundo encontrar-se entre as dezessete principais cidades do Brasil recomendadas para investimentos financeiros (*Exame*, edição 566, ano 26, n 19, 14/set/94), decidiu-se proceder a um estudo da dinâmica da população da cidade.

Os resultados do projeto, acredita-se, podem ser úteis para o planejamento da urbanização, saneamento básico, consumo, sistema rodoviário, desenvolvimento econômico, sistema educacional e mercado de trabalho do município, entre outros.

Para abordar matematicamente a questão, foram usados os modelos clássicos de Malthus e Verhulst, pelo fato de serem “modelos realmente simples que permitem-nos avaliar criticamente as várias suposições (hipóteses) e suas conseqüências”. Foram coletados dados relativos a nascimentos e óbitos junto ao Cartório de Registro Civil, hospitais e IBGE de Passo Fundo, que representam a população real dos anos de 1981 a 1991.

## 2 MODELO E MÉTODO

A forma mais simples de representar o processo da dinâmica populacional é o modelo de Malthus, no qual é assumido que a probabilidade de a população se reproduzir ou morrer permanece constante. Já no modelo de Verhulst o crescimento da população é limitado pelo fator logístico  $k$  (capacidade de sustentação do meio ambiente), o qual geralmente é determinado por recursos de sustentação disponíveis.

Os modelos são definidos da seguinte forma:

a) Modelo de Malthus

$$\frac{dN}{dt} = (\alpha - \beta)N(t) \Rightarrow N(t) = N_0 e^{(\alpha - \beta)t}$$

onde:

a = taxa de natalidade e

b = taxa de mortalidade

Sabe-se que

1) se  $a > b$ , então,  $\lim_{t \rightarrow \infty} N(t) = \infty$  (Figura 1.a);

2) se  $a = b$ , então,  $\lim_{t \rightarrow \infty} N(t) = N_0$  (Figura 1.b);

3) se  $a < b$ , então,  $\lim_{t \rightarrow \infty} N(t) = 0$  (Figura 1.c).

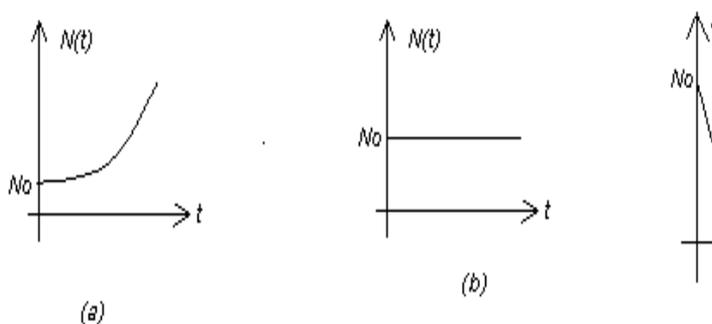


Figura 1 - Crescimento populacional em função do tempo, segundo o modelo de Malthus.

b) Modelo de Verhulst

$$\frac{dN}{dt} = a \left( 1 - \frac{N(t)}{k} \right) N(t) \Rightarrow N(t) = \frac{N_0 k}{N_0 + (k - N_0) e^{-at}}$$

onde, supondo  $a > 0$ , tem-se

- 1) se  $N_0 > k$ , a função  $N(t)$  decresce vagarosamente para  $k$  (Figura 2);
- 2) se  $N_0 < k$ , a função  $N(t)$  cresce vagarosamente para  $k$  (Figura 2).

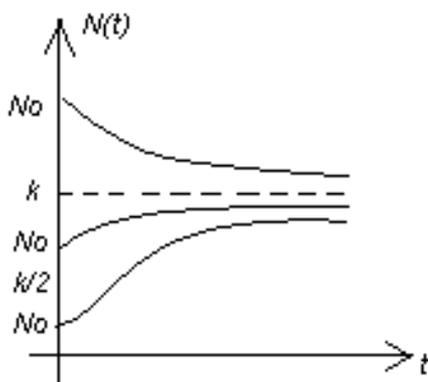


Figura 2 - Crescimento populacional em função do tempo, segundo o modelo de Verhulst.

Os cálculos dos parâmetros  $a$  e  $b$  foram determinados pela média aritmética das taxas anuais de natalidade e mortalidade, respectivamente, relativas ao período de 1981 a 1991, resultando na taxa de crescimento  $a = a - b = 0,019077181$ .

A constante logística  $k$  foi determinada pela comparação entre a linearização do modelo de Verhulst e o ajuste linear dos dados reais pelo método dos mínimos quadrados. O valor encontrado para  $k$  que permitiu o melhor ajuste do modelo foi  $k=7601993,668$ .

Utilizando os parâmetros  $a$  e  $k$ , foram calculadas as populações dos anos de 1981 a 1991, segundo os modelos adotados. Esses resultados encontram-se na Tabela 1 e estão ilustrados na Figura 3.

Tabela 1 - População real 1981/1991 e população segundo os modelos de Malthus e Verhulst

T	Ano	Pop. Real	Pop. Malthus	Pop. Verhulst
0	1981	124301	124301	124301
1	1982	127287	126695	126655
2	1983	130182	129135	129053
3	1984	132938	131622	131496
4	1985	135923	134158	133984
5	1986	138915	136741	136518
6	1987	141363	139375	139099
7	1988	143804	142060	141728
8	1989	145881	144796	144406
9	1990	147639	147584	147134
10	1991	149757	150427	149912

Fonte da população real: hospitais do município, cartórios, IBGE e Prefeitura Municipal de Passo Fundo.

Analisando os resultados da Tabela 1, percebe-se que os modelos descreveram satisfatoriamente o processo real da dinâmica populacional urbana de Passo Fundo no período de 1981 a 1991, apresentando erro máximo de 2,9% acima do real (o IBGE considera aceitável a margem de erro de 5%). Dessa forma, determinados os parâmetros dos modelos que melhor descreveram a dinâmica da população da cidade no período considerado, realizaram-se simulações de projeções segundo os modelos de Malthus e Verhulst para o período de 1992 a 1995. A comparação entre os resultados obtidos e os dados reais do período de 1992 a 1995 aponta um erro máximo de 3,4%. Isso permite assumir que os valores calculados para os parâmetros dos modelos são adequados para a realização de projeções para o período de quatro anos. Tanto os dados reais como os provenientes das simulações encontram-se na Tabela 2 e são ilustrados na Figura 4.

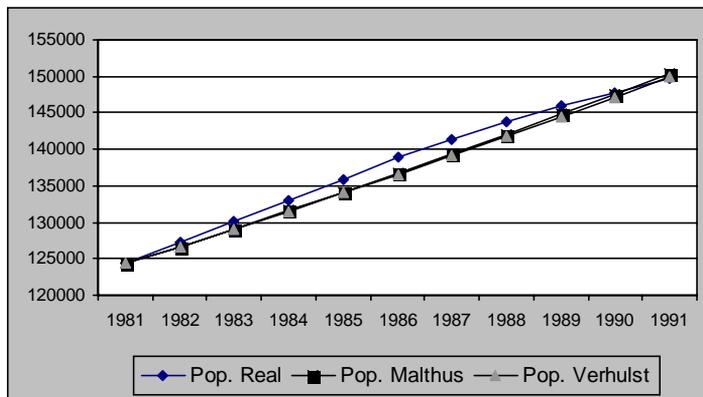


Figura 3 - População real e população segundo os modelos.

Tabela 2 - População real 1992/1995 e população segundo os modelos de Malthus e Verhulst

T	Ano	Pop. Real	Pop. Malthus	Pop. Verhulst
11	1992	151407	153324	152741
12	1993	153138	156277	155623
13	1994	154954	159287	158558
14	1995	156986	162355	161547

Fonte da população real: Cartório Civil de Passo Fundo.

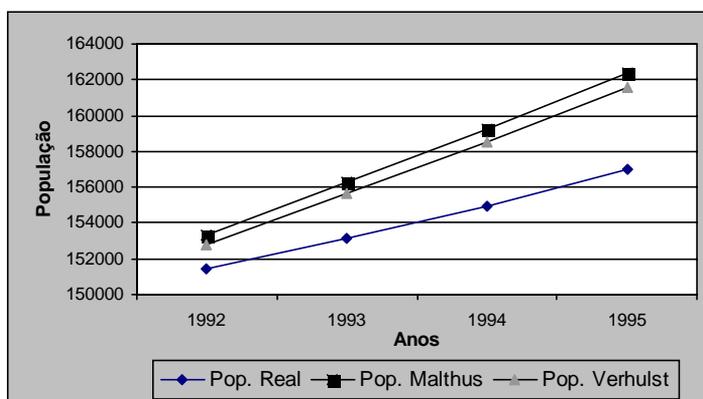


Figura 4 - Projeções da população de Passo Fundo para o período de 1992 a 1995.

### 3 CONCLUSÃO

A dinâmica da população urbana de Passo Fundo ficou bem descrita pelos modelos de Malthus e Verhulst no período de 1981 a 1991.

Considerando que o crescimento populacional é determinado por diversos fatores limitantes e que planejamentos sociopolítico-econômicos são feitos para períodos de curta duração, as simulações realizadas nos permitiram constatar que o modelo de Verhulst foi o mais adequado para projeções no intervalo de quatro anos para a população considerada, conforme se verifica na Tabela 2 e Figura 4.

Sabe-se que os fatores que influenciaram a dinâmica populacional são nascimento, morte e migração. Neste estudo, o fator migração foi considerado de forma implícita nas taxas de natalidade e mortalidade em virtude das fontes consultadas.

### 4 REFERÊNCIAS

- MURRAY, J. D. *Mathematical biology*. 2.ed. New York: Springer - Verlag, 1993.
- BASSANEZI, R. C.; FERREIRA JR, W.C. *Equações diferenciais com aplicações*. São Paulo: Harbra, 1988.
- EDELSTEIN-KESHET, L. *Mathematical models in biology*. New York: McGraw-Hill, 1988.
- ANDRADE, M. C de. *Geografia econômica*. Publicação Atlas, 1993.
- POLLARD, J. H. *Mathematical models for the growth of human populations*. New York: Cambridge University Press, 1973.
- BOYCE, W. E.; DIPRIMA, R. C. *Elementary differential equation and boundary value problems*, 5. ed. Singapore: John Wiley & Sons, 1996.
- MARINHO, P. A *Pesquisa nas ciências humanas*. São Paulo: Vozes, 1981.
- RAFICOV, M. M. Identificação numérica de modelos biomatemáticos. *Revista Biomatemática*, Unicamp: Campinas, 1995.

## SYNOPSIS

### *STUDY OF THE POPULATIONAL DYNAMICS OF THE TOWN OF PASSO FUNDO BY USING THE MODELS OF MALTHUS AND VERHULST*

*This work presents a study of the urban populational dynamics of the town of Passo Fundo according to the classical models of Malthus and Verhulst. The parameters of both models have been calculated from real data. The simulation of populational dynamics according to Malthus presented results pretty close to real, the best simulation closeness, however, has been obtained through the model of Verhulst.*

*Key-words: populational dynamics, mathematical modeling, models.*

## SINOPSIS

### *ESTUDIO DE LA DINAMICA POBLACIONAL USANDO LOS MODELOS DE MALTHUS Y VERHULST: UNA APLICACIÓN A LA POBLACIÓN DE PASSO FUNDO*

*Este trabajo presenta un estudio de la dinámica poblacional urbana de la ciudad de Passo Fundo según los modelos clásicos de Malthus y Verhulst. Los parámetros de ambos modelos fueron calculados a partir de datos reales. La simulación de la dinámica poblacional según Malthus presentó resultados bastante próximos del real, sin embargo la mejor aproximación simulación fue obtenida através del modelo de Verhulst.*

*Palabras-clave: dinámica poblacional; modelagem matematica; modelos.*



# UNIVERSIDADE DE PASSO FUNDO

## A Universidade de Passo Fundo tem uma

### organização multicampi:

- Campus I e II - Passo Fundo
- Campus Palmeira das Missões
- Campus Soledade
- Campus Lagoa Vermelha
- Campus Carazinho
- Campus Casca

### Compõe-se de faculdades e institutos:

- Instituto de Ciências Exatas e Geociências
- Instituto de Filosofia e Ciências Humanas
- Instituto de Ciências Biológicas
- Instituto de Artes
- Faculdade de Agronomia
- Faculdade de Direito
- Faculdade de Economia e Administração
- Faculdade de Educação
- Faculdade de Educação Física
- Faculdade de Engenharia e Arquitetura
- Faculdade de Medicina
- Faculdade de Odontologia

### Cursos de graduação:

- Administração
- Agronomia
- Arquitetura e Urbanismo
- Ciência da Computação
- Ciências Biológicas
- Ciências Contábeis
- Ciências Econômicas
- Ciências LP
- Comunic. Social: Publicidade e Propaganda
- Comunicação Social: Jornalismo
- Comunicação Social: Radialismo
- Confecção Têxtil
- Desenho e Plástica
- Direito
- EA: Artes Plásticas \*
- EA: Música
- Economia Doméstica \*
- Educação Física
- Enfermagem
- Enfermagem e Obstetrícia
- Engenharia Civil
- Engenharia Elétrica - Eletrônica
- Engenharia Mecânica
- Filosofia
- Geografia
- História
- Letras
- Matemática
- Medicina
- Música: Canto
- Música Instrumento: Piano
- Odontologia
- Pedagogia: Séries Iniciais

- Pedagogia: Pré-Escolar
- Pedagogia: Educação de Excepcionais
- Psicologia
- Química
- Secretário Executivo

### Cursos de pós-graduação *lato sensu*:

- A produção do conhecimento e o ensino da ciência: física
- A produção do conhecimento e o ensino da ciência: matemática
- Alfabetização
- Arte-Educação
- Automação Industrial
- Biologia
- Cerâmica
- Ciência da Computação
- Ciência e Tecnologia de Alimentos
- Ciência dos Esportes Coletivos
- Contabilidade
- Direito Civil: Contratos e Responsabilidade Civil
- Direito: Bases do Direito Atual
- Educação Musical
- Engenharia de Segurança do Trabalho
- Gerontologia Social
- Gestão Estratégica Empresarial
- Informática Aplicada à Educação
- Leitura: Teoria e Prática
- Mercosul e Desenvolvimento Regional
- Metodologia do Ensino Religioso
- Moderna Gestão Empresarial
- Odontopediatria
- Orientação Educacional
- Ortodontia
- Periodontia
- Psicopedagogia (Feevale)
- Sistema de Plantio Direto
- Supervisão Escolar

### Cursos de pós-graduação *stricto sensu*:

- Administração (UPF - Ufsc)
- Agronomia
- Biologia Celular (UPF - Unicamp)
- Ciência da Computação (UPF - Ufrgs)
- Educação
- Filosofia (UPF - PUCRS)
- Psicologia do Desenvolvimento (UPF - Ufrgs)
- Teoria da Literatura (UPF - PUCRS)

### Escola de 2º grau:

- Nível Médio
- Técnico em Processamento de Dados
- Auxiliar de Enfermagem
- Técnico em Segurança do Trabalho
- Técnico em Radiologia Médica - Radiodiagnóstico
- Técnico em Alimentos

## EDITORA UPF

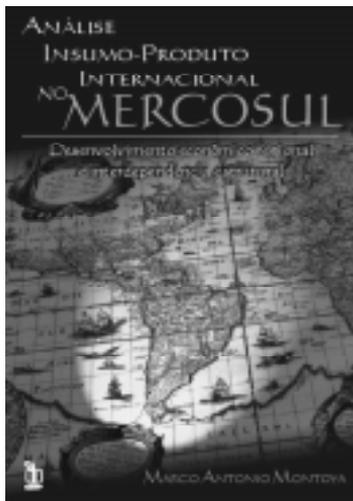
Publicações 1998

1. Alfabetização matemática (2. ed.) - Ocsana Sônia Danyluk
2. Relações intersetoriais do Mercosul e da economia brasileira - Marco Antonio Montoya (Org.)
3. Pequenas cirurgias ambulatoriais - Paulo Roberto Reichert (Org.)
4. Cooperativismo agrário e integração econômica - Ginez Leopoldo R. de Campos
5. Erro do direito e falsa causa no negócio jurídico (2. ed.) - Mário Martins Mateiro
6. A co-gestão esportiva no futebol: o caso Juventude-Parmalat - Nicolas Caballero Lois e Sergio Carvalho.
7. O diabo é vermelho - Carla Simone Rodeghero
8. Urbanização, exclusão e resistência - Selina Maria Dal Moro, Rosa Kalil e João C. Tedesco
9. A cultura historiográfica brasileira (do IHGB aos anos 1930) - Astor Antônio Diehl
10. A guerra guaranítica - Tau Golin
11. A maçonaria gaúcha no século XIX - Eliane Lucia Colussi
12. História e memória: a problemática da pesquisa - Loiva Otero Félix
13. Passo Fundo: uma história, várias questões - Astor Antônio Diehl
14. Cadernos Temáticos da Cultura Histórica nº 1: Identidade - Astor Antônio Diehl
15. Cadernos Temáticos da Cultura Histórica nº 2: O discurso tenentista na constituinte de 1933 - Ana Luiza S. Reckziegel
16. Cadernos Temáticos da Cultura Histórica nº 3: Aspectos da maçonaria em Passo Fundo 1876-1925 - Eliane Lucia Colussi
17. Cadernos Temáticos da Cultura Histórica nº 4: Elementos para o estudo da urbanização brasileira - Haroldo L. Carvalho
18. Cadernos Temáticos da Cultura Histórica nº 5: As relações institucionais da Igreja Católica de 1955 a 1965 - Rosimar Serena Siqueira
19. Cadernos Temáticos da Cultura Histórica nº 6: A trajetória política de Prestes Guimarães - Mariluci Melo Ferreira
20. A maldição do boi: problemas da cultura gauchesca - Tau Golin
21. Espaços da intimidade: memória & escritores & cinema - Tau Golin
22. Visualidades do sul: história e livros - Tau Golin
23. Educação e universidade: práxis e emancipação - Telmo Marcon (Org.)
24. Universidade: nove séculos de história - Ricardo Rossato
25. Tintas naturais: uma alternativa à pintura artística (2. ed.) - Maria Lucina Busato Bueno
26. Lei de diretrizes e bases da educação nacional (2. ed.) - Vice-Reitoria de Graduação
27. Contos do envelhecer - Agostinho Both

### *Periódicos:*

1. Revista de Filosofia e Ciências Humanas, v. 14, n. 1
2. Espaço Pedagógico, v. 5, n. 1
3. Justiça do Direito, v. 12, n. 12
4. Teoria e Evidência Econômica, v. 5, n. 10
5. RFO - Revista da Faculdade de Odontologia, v. 3, n. 1

## OUTRAS PUBLICAÇÕES DO CEA



### ANÁLISE INSUMO-PRODUTO INTERNACIONAL NO MERCOSUL

Marco Antonio Montoya

ISBN 85-86010-53-7

Ediupf, 1999

??? páginas

*O desenvolvimento de blocos econômicos em várias partes do mundo, numa tentativa de promover maior interação entre os países-membros, tem gerado a necessidade de uma análise mais atenta para explorar o grau de expectativas de maior comércio. Este livro fornece uma abordagem criativa para a fundamentação dessa análise, adotando um modelo inter-regional e*

*intersetorial insumo-produto, capaz de documentar o grau de dependência de qualquer região (país) no Mercosul em relação a outra região-membro. Além disso, ao elaborar as interações em nível de setores individuais, possibilita localizar impactos por espaço e entre setores. Como um modelo analítico, ele permite compreender o modo como essas economias integradas funcionam.*

*A análise também explora aspectos específicos da interdependência. Nesse processo, enquanto os países têm um grau modesto de dependência externa, a interação entre eles está muito limitada em termos de exportações, mas há evidência de um maior envolvimento no lado das importações. Em termos de importância analítica, o livro mostra que a economia brasileira tende a ser dominante, o que não é surpreendente em razão do tamanho do país, vis a vis os sócios restantes. Quando a análise focaliza o papel do impacto da demanda externa sobre a economia, fica claro que, direta e indiretamente, há muito mais evidências de dependência externa, embora com uma proporção considerada ainda pequena para o Mercosul.*

*Esses resultados prevêm uma perspectiva interessante quando comparados a constatações semelhantes na América do Norte e Europa. O mercado do Mercosul é, de longe, menos integrado que a União Européia ou o Nafta. Em parte, isso reflete diferenças nos níveis de desenvolvimento. Porém, um problema mais importante pode ser localizado na infra-estrutura de transporte, mal desenvolvida, que limita severamente o volume de interação espacial entre países (e também dentro de muitos desses países). É improvável que o sucesso total do Mercosul seja alcançado sem um investimento significativo nos sistemas de transporte. O modelo analítico desenvolvido por Montoya e as atualizações subsequentes irão prover uma ferramenta importante para avaliar o crescimento e o desenvolvimento desse processo de integração. Com ele, poder-se-á gerar um conjunto de dados benchmark que será de imenso valor nos próximos anos.*

Geoffrey J. D. Hewings

*Diretor do Regional Economics Applications Laboratory e  
professor da Universidade de Illinois at Urbana-Champaign*

## OUTRAS PUBLICAÇÕES DO CEA



### AGRICULTURA FAMILIAR Realidades e perspectivas 2ª edição

João Carlos Tedesco  
(Organizador)

ISBN 85-86010-32-4  
Ediupf, 1998  
151 páginas

*A agricultura familiar, ao que nos parece, vai na contramão da profetização histórica que pregava seu desaparecimento com o avanço do capitalismo e seu correlato desenvolvimento técnico. A reificação e a naturalização da noção de progresso parece que não tinham a agricultura familiar como sua parceira de viagem. No entanto, a capacidade de manter-se e reproduzir-se, malgrado conjunturas socioeconômicas e políticas um tanto adversas, desafia analistas, o modelo produtivista e a racionalidade moderna li-near e progressista que se implantou no meio rural. As formas diversas de se manifestar, sua importância econômica, social e cultural fazem repensar seu papel, rever pressupostos modernizantes, reivindicam proteção pública e políticas específicas. De atrasada, disfuncional e desintegrada, a agricultura familiar passa a ser vista como salvaguarda de questões sociais, culturais, econômicas, ecológicas e turísticas. No entanto, sua centralidade na contemporaneidade não está sendo sinônimo de rompimento de contradições e de continuidades de processos fundiários, da má distribuição de recursos públicos, do anacronismo da renda fundiária, da exclusão de agricultores dos direitos sociais e de propriedade, fatores esses que, além de serem socialmente perversos, minimizam o potencial modernizador da sociedade e do agrobrasileiro.*

*A coletânea quer contribuir para problematizar essas grandes questões que perpassam o meio rural e que refletem processos sociais do Brasil contemporâneo.*