UNIVERSIDADE DE PASSO FUNDO
FACULDADE DE CIÊNCIAS ECONÔMICAS
ADMINISTRATIVAS E CONTÁBEIS
CENTRO DE PESQUISA E EXTENSÃO DA FEAC

Texto para discussão

Texto para discussão nº 03/2011

ESTÁTICA DE EQUILÍBRIO
O MODELO IS-LM PARA UMA ECONOMIA FECHADA

Giovani da Silva Oliveira
Maria de Fátima Salles de Souza Campos

Passo Fundo - RS - Brasil

ESTÁTICA DE EQUILÍBRIO
O MODELO IS-LM PARA UMA ECONOMIA FECHADA[1]

Giovani da Silva Oliveira[2]
Maria de Fátima Salles de Souza Campos[3]
giovani251@hotmail.com
mariadefatima.campos@uol.com.br
Mestrado em Economia Regional, Departamento de Ciências Sociais Aplicadas - CESA, Universidade Estadual de Londrina – PR, Brasil
Caixa Postal 6001, 86051-990, Londrina - PR – Brasil
Departamento de Matemática, Universidade Estadual de Londrina, 86051-990. Londrina – PR, Brasil

[1] Artigo realizado para a Disciplina Economia Matemática, ministrada pelo Profº Naresh Kumar Sharma.
[2] Economista. Mestrando em Economia Regional na Universidade Estadual de Londrina – UEL.
[3] Economista. Profª no Departamento de Economia na Universidade Estadual de Londrina – UEL.

Resumo. *A moderna Teoria Econômica a fim de simplificar suas relações hipotéticas e transmitir percepções de fácil entendimento utiliza-se de um modelo matemático que busca descrever o funcionamento de uma economia. A estática de equilíbrio (álgebra linear) fornece uma dessas ferramentas, e entre outras abordagens, pode auxiliar na determinação de renda de equilíbrio em um determinado país. A proposta deste trabalho é descrever o Modelo IS-LM para uma economia fechada pela Extensão de Laplace e Regra de Cramer. Para atingir tal objetivo, a ferramenta matemática que busca explicar o equilíbrio, auxiliará na identificação de variáveis e premissas que, através que um modelo busca definir.*

Palavras-chave: *equilíbrio estático, modelo IS-LM, determinação de renda.*

1 Introdução

A moderna Teoria Econômica a fim de simplificar suas relações hipotéticas e transmitir percepções de fácil entendimento utiliza-se de um modelo econômico que busca descrever o funcionamento do mundo. Um modelo é uma representação matemática com o objetivo de descrever um aspecto da economia. A discussão proposta neste trabalho tem como base o método encontrado na álgebra linear, ideal para resolver um sistema de equações simultâneas. Após uma breve conceituação do método, particularmente do cálculo de um determinante pela Extensão de Laplace e da Regra de Cramer, será apresentado um exemplo econômico de determinação de renda, o Modelo IS-LM para uma economia fechada. Para alcançar tal objetivo, a ferramenta matemática que busca explicar o equilíbrio, auxiliará na identificação de variáveis e premissas utilizadas no modelo.

2. Referencial teórico

Neste tópico serão apresentadas idéias, conceitos e regras para manuseio correto da álgebra linear e bem como suas inerentes características.

Segundo Rauber (2003), após definição do tema, são necessárias leituras onde sejam trabalhadas as informações necessárias, que resulte numa delimitação clara e concisa do que se pretende investigar, a fim de aumentar o entendimento a cerca do assunto ou objeto de análise.

2.1 Análise Estática de equilíbrio

A álgebra linear segundo Chiang (2006) é capaz de compactar um sistema de equações por maior extensão que ela possa ter e indicar o caminho para a verificação de um *determinante*[4], além de dar um método para achar tal solução, caso ela exista.

A definição de um sistema de equações para

[4] O determinante de uma matriz quadrada A, denotado por $|A|$, é um escalar (número) unicamente definido, associado com aquela matriz. Determinantes são definidos somente para matrizes quadradas (CHIANG, 2006, P. 87).

a solução de uma matriz com arranjos apresenta três tipos de componentes: um conjunto de coeficientes (a_{ij}), um conjunto de variáveis (x_1) e, um conjunto de termos constantes (d_1), de acordo com formato abaixo:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11}a_{12}...a_{1n} \\ a_{21}a_{22}...a_{2n} \\ .... \\ a_{m1}x_1a_{m2}..a_{mn} \end{bmatrix} \quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ ..... \\ x_n \end{bmatrix} \quad d = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ ..... \\ d_n \end{bmatrix} \qquad (01)$$

Assim, pode-se definir o conceito de matriz "como um arranjo retangular de números, parâmetros ou variáveis" (CHIANG, 2006, P.51).

Matrizes podem ser somadas, subtraídas. Pode acorrer multiplicação escalar, ou multiplicação entre matrizes. As duas primeiras obedecem às leis comutativa, associativa e distributiva, conforme relações expostas abaixo:

Comutativa da adição: $a+b=b+a$;

Comutativa da multiplicação: $ab=ba$;

Associativa da adição:
$(a+b)c = a+(b+c)$;

Associativa da multiplicação:
$(ab)c = a(bc)$;

Distributiva: $a(b+c) = ab+ac$.

Ao serem intercambiadas linhas e colunas de uma matriz *A*, obtém-se a transposta ou inversa de *A*, denotada por *A'* ou A^T. Estas inversões possuem as seguintes propriedades:

$$(A')' = A;$$

$$(A+B)' = A'+B';$$

$$(AB) = B'A'$$

> "A primeira afirma que a transposta da transposta é a matriz original, enquanto a segunda afirma que a transposta de uma soma é a soma das transpostas. A terceira diz que a transposta de um produto é o produto das transpostas na ordem inversa" (CHIANG, 2006, P. 73).

As relações recritas acabam por definir e formalizar as principais movimentações que uma matriz pode sofrer.

2.2 Testes de Invertibilidade

Para a aplicação dos conceitos apresentados acima, e acharmos o determinante de uma matriz, um exemplo pode formalizar tal aspecto. Uma matriz 2x2 tem seu determinante definido como a soma de dois termos, obtido pela multiplicação dos elementos da diagonal principal de *A*, seguido pela subtração do produto dos elementos da diagonal secundária.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11}a_{12} \\ a_{21}a_{22} \end{bmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12} = [escalar] \qquad (02)$$

Em matrizes com ordem superior a três, o melhor caminho é através do cálculo da Expansão de Laplace, assunto que será apresentado na metodologia de análise.

2.3 Aplicação econômica

Após a apresentação da manipulação algébrica, suas propriedades e conceitos, o próximo tópico visa apresentar o modelo econômico, com relações tautológicas, ao qual se aplica a ferramenta matemática descrita.

2.3.1 O Modelo IS-LM para determinação de renda – economia fechada

O modelo de renda de equilíbrio foi desenvolvido por John Maynard Keynes, e descrito na obra *A teoria geral do emprego, do juro e da moeda* (1936) e interpretado por Sir John Hicks no ano seguinte foi chamado de Análise IS-LM (Simon e Blume, 2004).

Trata-se de um modelo linear, de equações simultâneas, para determinação de variáveis que influenciam na determinação da renda de equilíbrio em uma economia fechada, ou seja, sem importação, exportação ou outros vazamentos (sem comércio exterior).

Este modelo, de acordo com Vasconcelos (2008) incorpora a mercado de ativos e a determinação de taxa de juros à análise, sendo que esta influi na determinação de renda através do investimento. Quanto maior a taxa de juros menor o investimento. Assim, observa-se que o modelo descreve como a taxa de juros e a renda, simultaneamente, equilibram o mercado de bens e ativos.

A sigla IS (do inglês *Investmen-Saving*) identifica os pontos onde a Oferta agregada de bens e serviços (OA) cruza com a curva de Demanda agregada (DA) de bens e serviços . Já a curva LM (do inglês *Liquidity Money*) determina o equilíbrio no mercado de ativos (VASCONCELOS, 2008).

Em uma determinada economia, quando em equilíbrio, o produto total (Y) deve ser igual ao gasto total, que deve ser igual à renda nacional total.

Assim temos a seguinte relação, do lado do gasto a renda (Y) é decomposta entre o gasto no consumo (C) mais gasto em investimento (I) mais o gasto do governo (G).

$$Y = C + I + G \qquad (03)$$

Sendo o consumo (C) proporcional à renda total recebida (Y: $C = bY$), com o parêmtro b sendo um valor entre zero e um e denominado propensão marginal a consumir ($0 < b < 1$). De forma análoga, temos ($s = 1 - b$), é chamada de propensar marginal a poupar.

O investimento é uma função decrescente da taxa de juros r. Seguindo a forma linear abaixo:

$$I = I^0 - ar \qquad (04)$$

Onde o parâmetro a é chamado de eficiência marginal do capital.

Ao agruparmos as equações descritas acima, temos a seguinte relação para formalizar a equação da curva IS.

$$Y = bY + (I^0 - ar) + G \qquad (05)$$

Podendo ser reescrita como:

$$sY + ar = I^0 + G \qquad (06)$$

Onde $s=1-b$, a, I^0 e G são os parâmetros positivos.

Segundo Simon e Blume (2004) esta equação descreve o lado real da economia, indicando como as decisões de consumo, investimento e poupança são alocadas.

Para o lado monetáro, a equação da curva LM determina a igualdade entre a oferta de moeda M_s e a demanda de moeda M_d. Sendo a oferta de moeda determinada fora do sistema.

A demanda por moeda foi descrita por Keynes, como contendo dois componentes: a demanda por motivo transação:

$$M_{dt} = mY \qquad (07)$$

E demanda por motivo especulação:

$$M_{ds} = M^0 - hr \qquad (08)$$

Assim, pode-se concluir que a "curva LM é a relação de entre renda nacional e taxa de juros, determinada pela condição que a oferta de moeda é igual à demanda de moeda (SIMON E BLUME, 2004, p. 129), da seguinte forma:

$$\begin{aligned} M_s &= mY + M^0 - hr \\ mY - hr &= M_s - M^0 \end{aligned} \qquad (09)$$

Onde os parâmetros m,h e M^0 são todos positivos.

Para resolver o modelo e encontrar o equilíbrio, agora que temos as descrições das equações das curvas IS e LM que satisfazem o modelo, utiliza-se a renda total (Y) e a taxa de juros (r) como solução do sistema de equações:

$$\begin{aligned} sY + ar &= I^0 + G \\ mY - hr &= M_s - M^0 \end{aligned} \qquad (10)$$

A solução dependerá dos parâmetros M_s e G, além dos parâmetros comportamentais a, h, I^0, m, M^0 e s, e poderá ser resolvido pela utilização da Extensão de Laplace e Regra de Cramer. Em seguida, será apresentada a metodologia de contida nestas ferramentas matemáticas.

3 Metodologia

Lakatos (2008) afirma que o método tem a finalidade de buscar a verdade através da observação rigorosa e sistemática do conjunto de conhecimentos válidos, e que indicam o caminho na obtenção de um objetivo.

3.1 Expansão de Laplace

Trata-se de um método para calcular o determinante de uma matriz de ordem três. E consiste na seguinte estrutura. Um determinante menor guarda um importante componente, trata-se do co-fator. Denotado por $|C_{ij}|$ é um determinante menor acompanhado de um sinal algébrico definido[5], onde cada um dos quais é o produto de um elemento da primeira linha e seu co-fator correspondente.

$$|A| = a_{11}|M_{11}| - a_{12}|M_{12}| + a_{13}|M_{13}|$$
$$= a_{11}|C11| + a_{12}|C_{12}| + a_{13} + |C_{13}| = \sum_{j=1}^{3} a_{ij} \qquad (11)$$

Em um determinante de quarta ordem $|B|$, a linha conterá quatro elementos $b_{11}...b_{14}$; assim pode-se escrever que:

$$|B| \sum_{j=1}^{4} b_{1j} |C_{1j}| \qquad (12)$$

Em geral, de acordo com Chiang (2006), a expansão de Laplace para um determinante de *n*-ésima ordem reduzirá o resultado à avaliação de *n*-cofatores, cada um de ordem (*n*-1). Sua aplicação repetida, segundo o autor, indicará determinantes de ordens cada vez mais baixas.

Em resumo, o valor de um determinante $|A|$ de ordem *n* pode ser encontrado pela expansão de Laplace de qualquer linha e qualquer coluna, de acordo com as seguintes expressões:

$$|A| = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} |C_{ij}|$$

[expansão pela *i*-ésima linha] (13)

$$= \sum_{i=1}^{n} a_{ij} |C_{ij}|$$

[expansão pela *i*-ésima coluna] (14)

Para finalizar a exposição matemática para a determinação de renda, será apresentada a regra de Cramer, como método de inversão de matriz.

3.2 Regra de Cramer

Em um sistema de equações $Ax = d$, onde A é *n x n*, sua solução será:

$$x^* = A^{-1}d = \frac{1}{|A|}(adjA)d \qquad (15)$$

Desde que A seja invertível. Isso pode ser generalizado, como segue:

$$x_j^* = \frac{|A_j|}{|A|} = \frac{1}{|A|} \begin{vmatrix} a_{11}a_{12}...d_1.....a_{1n} \\ a_{21}a_{22}...d_2.....a_{2n} \\ .... \\ a_{n1}a_{n2}...d_n.....a_{nn} \end{vmatrix} \qquad (16)$$

> O resultado acima enuncia a regra de Cramer. Ao passo que a inversão de matriz resulta nos valores de solução de todas "as variáveis endógenas de uma só vez (*x** é um vetor), a regra de Cramer pode nos dar o valor de solução de uma única variável endógena por vez (*x** é um escalar); é por isso que essa regra pode não ser eficiente" (CHIANG, 2006,P. 102).

Após a apresentação matemática, a inserção de um exemplo econômico objetiva consolidar a utilização dos métodos expostos acima. Este exemplo foi retirado de Chiang (2006. p.107).

---

[5] A regra de sinal dos co-fatores: "Se a soma dos dois índices *i* e *j* no determinante menor $|M_{ij}|$ forem pares, então o co-fator adota o mesmo sinal do determinante menor; isto é. $|C_{ij}| = |M_{ij}|$. Se a soma for ímpar, então o co-fator adota o sinal oposto ao sinal do determinante menor, isto é $|C_{ij}| = -|M_{ij}|$. Em suma tens que: $|C_{ij}| \equiv (-1)^{i+j}|M_{ij}|$, onde a expressão $(-1)^{i+j}$ pode ser positiva se, e somente se, $(i + j)$ for par" (CHIANG, 2006, P. 90).

4 Resultados

4.1 Equações, símbolos e unidades do modelo IS-LM para uma economia fechada

O modelo discutido, tem sentido linear sendo que para determinar o equilíbrio do modelo IS-LM para uma economia fechada, define-se a composição desta economia em dois setores: o setor de bens reais de serviços e o setor monetário.

$$\begin{cases} Y = C + I + G \\ C = a + b(1-b)Y \\ I = d - ei \\ G = G_o \end{cases} \tag{17}$$

Neste modelo, as variáveis endógenas são Y, C, I e i (onde i é a taxa de juros). As variáveis exógenas é G_0, enquanto a, d, e, b e t são os parâmetros estruturais do modelo.

O mercado monetário apresenta as seguintes relações:

Condição de equilíbrio: $M_d = M_s$ (18)

Demanda por moeda: $M_d = \kappa Y - li$ (19)

Oferta de moeda: $M_s = M_0$ (20)

Onde M_0 representa o estoque exógeno de moeda e κ e l são os parâmetros. Para este modelo as equações podem ser condensadas em:

$$M_0 = \kappa Y - li \tag{21}$$

A união dos dois setores resulta no seguinte sistema de equações:

$$\begin{cases} Y - C - I = G \\ b(1-b)Y - C = -a \\ I + ei = d \\ \kappa Y - li = M_0 \end{cases} \tag{22}$$

Sob a forma de matriz as relações acima resultam:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 \\ b(1-t) & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & e \\ \kappa & 0 & 0 & -l \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} Y \\ C \\ I \\ i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G_0 \\ -a \\ d \\ M_0 \end{bmatrix} \tag{23}$$

Para encontrar o determinante da matriz de coeficientes, pode ser usada a extensão de Laplace em uma das colunas (preferencialmente a que contiver mais zeros), assim, expandindo a quarta coluna, tem-se que:

$$|A| = (-e)\begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ b(1-t) & -1 & 0 \\ \kappa & 0 & 0 \end{vmatrix} - l\begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ b(1-t) & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \tag{24}$$

$$= (e)(\kappa)\begin{vmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} - l\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ b(1-t) & -1 \end{vmatrix} \tag{25}$$

$$= e\kappa - l[(-1) - (-1)b(1-t)] \tag{26}$$

$$= e\kappa + l[(-1)b(1-t)] \tag{27}$$

Para que a renda de equilíbrio (Y^*) seja encontrada, pode-se usar a regra de Cramer. Isto é, substituímos a primeira coluna da matriz de coeficientes A pelo vetor de variáveis exógenas e tomando a razão entre o determinante da nova matriz e o determinante original, ou seja:

$$Y^* = \left|\frac{A_1}{A}\right| = \frac{\begin{vmatrix} G_0 & -1 & -1 & 0 \\ -a & -1 & 0 & 0 \\ d & 0 & 1 & e \\ M_0 & 0 & 0 & -l \end{vmatrix}}{e\kappa + [1 - b(1-t)]} \tag{28}$$

Ao ser utilizada a Expansão de Laplace na segunda coluna do numerador resulta em:

$$Y^* = \left|\frac{A_1}{A}\right| = \frac{(-1)(-1)^3\begin{vmatrix} -a & 0 & 0 \\ d & 1 & e \\ M_0 & 0 & -l \end{vmatrix}}{e\kappa + [1 - b(1-t)]} + \frac{(-1)(-1)^4\begin{vmatrix} G_0 & -1 & 0 \\ d & 1 & e \\ M_0 & 0 & -l \end{vmatrix}}{e\kappa + l[1 - b(1-t)]} \tag{29}$$

$$= \frac{\begin{vmatrix} -a & 0 & 0 \\ d & 1 & e \\ M_0 & 0 & -l \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} G_0 & -1 & 0 \\ d & 1 & e \\ M_0 & 0 & -l \end{vmatrix}}{e\kappa + l[1 - b(1-t)]} \tag{30}$$

Expandindo ainda mais, obtemos:

$$Y^* = \frac{(1)\begin{vmatrix} -a & 0 \\ M_0 & -l \end{vmatrix} - \left\{ (-1)(-1)^3 \begin{vmatrix} d & e \\ M_0 & -l \end{vmatrix} + (-1)^4 \begin{vmatrix} G_0 & o \\ M_0 & -l \end{vmatrix} \right\}}{e\kappa + l[1 - b(1-t)]} \tag{31}$$

$$= \frac{al - [d(-l) - eM_0] - G_0(-l)}{e\kappa + l[1 - b(1-t)]} \tag{32}$$

$$= \frac{l(a + d + G_0 + eM_0}{e\kappa + l[1 - b(1-t)]} \tag{33}$$

Visto que a solução linear para a determinação da renda de equilíbrio (Y^*) é linear, no que se refere às variáveis exógenas do modelo, pode-se reescrever:

$$Y^* = \left(\frac{e}{e\kappa + l[1 - b(1-t)]} \right) M_0 + \left(\frac{l}{e\kappa + l[1 - b(1-t)]} \right) (a + d + G_0) \tag{34}$$

Desta forma, se observa que os multiplicadores da política keynesiana relativos à oferta de moeda e às despesas do governo são os coeficientes de M_0 e G_0, da seguinte maneira.

Multiplicador da oferta de moeda:

$$\frac{e}{e\kappa + l[1 - b(1-t)]} \tag{35}$$

Multiplicador das despesas do governo:

$$\frac{l}{e\kappa + l[1 - b(1-t)]} \tag{36}$$

Assim, observa-se que das relações iniciais identificadas pelas equações, simplificaram as notações a duas equações que mostram de que forma a oferta de moeda influenciará a renda de equilíbrio, bem como os investimentos promovidos pelo governo.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Este trabalho objetivou demonstrar a utilização dos métodos de Extensão de Laplace e a Regra de Cramer podem auxiliar na explicação de um problema econômico. Para tanto, foi realizada uma revisão bibliográfica sobre o modelo IS-LM para uma economia fechada. Suas variáveis e premissas, bem como a descrição dos procedimentos da Extensão de Laplace e da Regra de Cramer como método de análise deste sistema de equaçõe simultâneas.

Para Chiang (2006) as simplificações que os modelos matemáticos fornecem, descrevem uma série de relações econômicas de forma mais objetiva e precisa. Porém a discussão do equilíbrio estático, no caso, a determinação de renda de equilíbrio, a principal incógnita a ser desvendada é descobrir os valores de equilíbrios das variáveis endógenas no modelo.

Este tipo de análise pode deixar de lado dois problemas: o primeiro consiste em não observar forças exógenas ao modelo, em razão do processo de ajuste ser em tempo contínuo. O segundo, é que mesmo que processo ocorra sem interferências, esse mesmo equilíbrio pode ser inalcançável.

Já Simon e Blume (2004) afirmam que um modelo linear pode ser utilizado como um primeiro passo na formalização de um outro mais complexo, por exemplo um modelo não-linear. Para os autores, a estática comparativa de modelos não-lineares, só pode ser observada pelo estudo das versões lineares.

REFERÊNCIAS

CHIANG, Alpha C. **Matemática para economistas** – Rio de Janeiro: Elsiever, 2006.

LAKATOS, Eva Maria. **Metodologia científica.** - 5ª ed. – 2ª reimpressão. – São Paulo: Atlas, 2008, 312 p.

RAUBER, Jaime José; SOARES, Márcio (Org.) **Apresentação de Trabalhos Científicos: normas e orientações práticas.** 3ª ed. – Passo Fundo: UPF, 2003.

SANDRONI, Paulo; **Dicionário de economia do século XXI.** Rio de Janeiro: Record, 2006. 909 p.

SIMON, Carl P.; Blume, L. **Matemática para economistas** - Porto Alegre: Bookman, 2004.

VASCONCELOS, M. A. **Manual de macroeconomia: nível intermediário.** São Paulo, Atlas, 2008.

REFERÊNCIAS CONSULTADAS

FUENTE, ANGEL de La. **Mathematical methods and models for economists** New York: Cambridge University Press, 2009.

CRUM , W. L.; SCHUMPETER, J. A.; **Elementos de matemática para economistas e estatísticos.** São Paulo: Vértice, 1985.